BAB II

KAJIAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas mengenai nilai eigen dan vektor eigen, sistem dinamik, sistem linear, sistem nonlinear, titik ekuilibrium, analisis kestabilan sistem dinamik, kriteria Routh-Hurwitz, bifurkasi, teori *center manifold,* dan vektor eigen tergeneralisasi.

A. Nilai Eigen, Vektor Eigen, Kebebasan Linear, dan Diagonalisasi

Penentuan nilai eigen dan vektor eigen sangat diperlukan untuk mencari solusi dari suatu sistem dinamik linear. Nilai eigen dan vektor eigen juga diperlukan dalam menentukan sifat kestabilan dari suatu sistem dinamik.

Definisi 2.1 (Anton, 1995 : 277)

Jika A merupakan matriks yang berukuran $n \times n$, maka vektor taknol x di dalam $\mathbb{R}^n$ dinamakan vektor eigen dari A jika memenuhi persamaan

$$Ax = \lambda x \tag{2.1}$$

dengan λ adalah suatu skalar (λ ∈ ℝ). Skalar λ dinamakan nilai eigen (*eigenvalue*) dari A dan x dikatakan vektor eigen (*eigenvector*) yang bersesuaian dengan λ.

Nilai eigen dari matriks A yang berukuran $n \times n$ diperoleh dari $Ax = \lambda x$ atau dapat ditulis sebagai $Ax = I\lambda x$. Persamaan tersebut secara ekuivalen dapat ditulis kembali menjadi

$$(A - \lambda I)x = 0 \qquad \mathbf{2.2}$$

dengan I adalah matriks identitas. Persamaan (2.2) mempunyai penyelesaian taktrivial jika dan hanya jika

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad \mathbf{2.3}$$

Persamaan (2.3) dinamakan persamaan karakteristik dari matriks A.

Contoh 2.1

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A berikut ini.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (2.3) maka diperoleh

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

sehingga persamaan karakteristiknya adalah

$$(1 - \lambda)\lambda(\lambda - 2) = 0 \qquad \mathbf{2.4}$$

sehingga berdasarkan persamaan (2.4) diperoleh nilai eigen dari matriks A yaitu $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, dan $\lambda_3 = 2$

Berdasarkan Definisi 2.1, vektor eigen dari matriks A adalah penyelesaian taktrivial dari $(A - \lambda I)x = 0$, yaitu

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{2.5}$$

Untuk $\lambda = 1$, maka (2.5) menjadi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{2.6}$$

Sistem (2.6) ekuivalen dengan persamaan berikut :

$$x_2 = 0 \qquad \mathbf{2.7a}$$

$$x_3 = 0 \qquad \mathbf{2.7b}$$

Berdasarkan (2.7) diperoleh penyelesaian dari sistem (2.6) adalah $x_2 = 0$, dan $x_3 = 0$. Misalkan $x_1 = s_1$, maka vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s_1 \qquad \mathbf{2.8}$$

Untuk $\lambda = 0$, maka (2.5) menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{2.9}$$

Sistem (2.9) ekuivalen dengan persamaan berikut :

$$x_1 = 0 \qquad \mathbf{2.10a}$$

$$x_2 + x_3 = 0 \qquad \mathbf{2.10b}$$

Berdasarkan (2.10) diperoleh penyelesaian dari sistem (2.9) adalah $x_1 = 0$ dan $x_2 = -x_3$. Misalkan $x_3 = s_2$, maka vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 0$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} s_2 \qquad \mathbf{2.11}$$

Untuk $\lambda = 2$, maka (2.5) menjadi

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{2.12}$$

Sistem (2.12) ekuivalen dengan persamaan berikut :

$$x_1 = 0 \qquad \mathbf{2.13a}$$

$$-x_2 + x_3 = 0 \qquad \mathbf{2.13b}$$

$$x_2 - x_3 = 0 \qquad \mathbf{2.13c}$$

Berdasarkan (2.13) diperoleh penyelesaian dari sistem (2.12) adalah $x_1 = 0$ dan $x_2 = x_3$. Misalkan $x_2 = s_3$, maka vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 2$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} s_3 \qquad \mathbf{2.14}$$

Berdasarkan (2.8), (2.11), dan (2.14) maka vektor eigen yang bersesuaian dengan λ adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Definisi 2.2 (Anton, 1995:284)

Matriks A yang berukuran $n \times n$ dikatakan dapat didiagonalisasi (*diagonalizable*) jika terdapat matriks P yang mempunyai invers sedemikian sehingga $P^{-1}AP$ adalah matriks diagonal, maka matriks P dikatakan mendiagonalisasi matriks A.

Definisi 2.3 (Anton, 1995:151)

Jika $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ adalah himpunan vektor, maka persamaan vektor

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_rv_r = 0 \qquad \mathbf{2.15}$$

mempunyai paling sedikit satu penyelesaian, yaitu

$$k_1 = 0, \qquad k_2 = 0, \qquad \dots, \qquad k_r = 0 \qquad \mathbf{2.16}$$

Jika (2.16) merupakan satu-satunya penyelesaian, maka S dinamakan himpunan bebas linear (*linearly independent*), sedangkan jika ada penyelesaian lain maka S dinamakan himpunan takbebas linear *(linearly dependent*).

Teorema 2.1 (Anton, 1995:285)

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka kedua pernyataan berikut ini adalah ekuivalen.

(a) A dapat didiagonalisasi

(b) A mempunyai n vektor eigen bebas linear

Bukti:

(a) $\Rightarrow$ (b). Karena A dapat didiagonalisasi, maka terdapat matriks yang mempunyai invers. Misalkan

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

sehingga $P^{-1}AP = D$ adalah matriks diagonal, dimana

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

maka,

$\Leftrightarrow PP^{-1}AP = PD$

$\Leftrightarrow AP = PD$, yakni

$$AP = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{2.17}$$

Jika dimisalkan $p_1, p_2, \dots, p_n$ menyatakan vektor-vektor kolom P, maka bentuk (2.17) kolom-kolom AP yang berurutan merupakan $\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \dots, \lambda_n p_n$. Akan tetapi kolom-kolom dari hasil kali AP adalah $Ap_1, Ap_2, \dots, Ap_n$, sehingga diperoleh

$$Ap_1 = \lambda_1 p_1, \qquad Ap_2 = \lambda_2 p_2, \dots, Ap_n = \lambda_n p_n \qquad \mathbf{2.18}$$

Karena P mempunyai invers, maka vektor-vektor kolomnya tidak bernilai nol, jadi berdasarkan Definisi 2.1, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen A, dan $p_1, p_2, \dots, p_n$ adalah vektor-vektor eigen yang bersesuaian. Karena P mempunyai invers maka diperoleh bahwa $p_1, p_2, \dots, p_n$ bebas linear. Jadi A memiliki n vektor eigen bebas linear.

(b) $\Rightarrow$ (a). Karena A memiliki n vektor eigen bebas linear misalkan $p_1, p_2, \dots, p_n$, maka terdapat nilai eigen yang bersesuaian yaitu $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, dan misalkan

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

adalah matriks yang vektor-vektor kolomnya adalah $p_1, p_2, \dots, p_n$. Karena $p_1, p_2, \dots, p_n$ merupakan vektor eigen dari matriks A dan kolom-kolom dari hasil kali AP adalah $Ap_1, Ap_2, \dots, Ap_n$ maka

$$Ap_1 = \lambda_1 P_1, \qquad Ap_2 = \lambda_2 P_2, \dots, Ap_n = \lambda_n P_n$$

sehingga diperoleh

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD \qquad \mathbf{2.19}$$

dimana D adalah matriks diagonal yang mempunyai nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pada diagonal utamanya. Karena vektor-vektor kolom dari P bebas linear, maka P mempunyai invers. Jadi (2.19) dapat dituliskan kembali sebagai $P^{-1}AP = D$ dengan A dapat didiagonalisasi. ■

Contoh 2.2

Carilah matriks P yang mendiagonalkan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari contoh 2.1 nilai eigen dari A adalah $\lambda = 1$, $\lambda = 0$, dan $\lambda = 2$. Vektor eigen yang bersesuaian dengan matriks A adalah $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, dan $p_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Akan ditunjukkan $\{p_1, p_2, p_3\}$ bebas linear. Berdasarkan Definisi 2.3 substitusikan p_1, p_2, dan p_3 pada persamaan (2.15) sehingga diperoleh

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \qquad \mathbf{2.20}$$

atau secara ekuivalen menjadi

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ -k_2 + k_3 \\ k_2 + k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jadi $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$ merupakan satu-satunya penyelesaian dari (2.20), sehingga $\{p_1, p_2, p_3\}$ bebas linear dan didapat

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Akan dibuktikan $P^{-1}AP$ adalah matriks diagonal

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Jadi, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ akan mendiagonalkan A.

B. Sistem Dinamik

Sistem dinamik terbentuk dari persamaan-persamaan diferensial baik persamaan diferensial biasa atau persamaan diferensial parsial.

Definisi 2.4 (Ross, 1984:3)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Menurut Ross (1984:4), persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa dan parsial. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas, sedangkan persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap dua atau lebih variabel bebas.

Contoh 2.3

Persamaan diferensial biasa ditunjukkan pada persamaan-persamaan berikut:

a. $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 5x$

b. $\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = \sin t$

c. $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 8y^2 = 0$

Persamaan diferensial parsial ditunjukkan pada persamaan-persamaan berikut:

a. $\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} = 2u$

b. $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$

c. $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2x + y$

Berdasarkan pengaruh waktu, sistem dinamik dibedakan menjadi dua yaitu sistem autonomous dan sistem nonautonomous (Campbell dan Haberman, 2008:316). Sistem autonomous adalah sistem dinamik yang secara eksplisit tidak bergantung terhadap waktu. Sistem dinamik autonomous dinyatakan sebagai

$$\dot{x} = f(x, y)$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

dimana f dan g secara eksplisit bukan merupakan fungsi dalam t dan turunan parsial $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$, dan $\frac{\partial g}{\partial y}$ kontinu (Giordano, Weir, dan Fox, 2003:413), sedangkan sistem nonautonomous adalah sistem dinamik yang secara eksplisit bergantung terhadap waktu. Sistem nonautonomous dinyatakan sebagai

$$\dot{x} = f(x, y, t)$$

$$\dot{y} = g(x, y, t)$$

dimana fungsi f dan g bergantung pada variabel bebas t (Perko,2001:66).

Contoh 2.4

Sistem autonomous ditunjukkan pada sistem (2.21) berikut

$$\dot{x_1}(t) = a x_1(t) - \alpha x_1(t) x_2(t)$$

$$\dot{x_2}(t) = -c x_2(t) + \gamma x_1(t) x_2(t) \qquad \textbf{2.21}$$

Sistem nonautonomous ditunjukkan pada sistem (2.22) berikut

$$\dot{x_1}(t) = 5x_1(t) + 7x_2(t) + t^2$$

$$\dot{x_2}(t) = 2x_1(t) - 3x_2(t) + 2t \qquad \textbf{2.22}$$

Berikut ini akan diberikan sebuah ilustrasi dari kasus pemodelan *predator-prey* menggunakan sistem dinamik.

C. Model Matematis Sistem *Predator-Prey*

Interaksi antara dua spesies yaitu interaksi antara spesies *predator* dengan *prey* dapat dirumuskan secara matematis ke dalam model *predator-prey*. Model *predator-prey* dikenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Volterra pada tahun

1926, sehingga model *predator-prey* disebut juga model Lotka-Volterra (Boyce dan Diprima, 2009:534).

Laju pertumbuhan populasi *prey* adalah sebesar ax dengan a adalah laju kelahiran dari *prey* dan x adalah populasi *prey*. Namun, pertumbuhan populasi *prey* akan berkurang karena adanya *predator*. Besarnya pengurangan tersebut adalah $-\alpha xy$ dengan α adalah laju penangkapan *prey* oleh *predator*, sedangkan y adalah populasi *predator*. Dengan demikian, model dinamika pertumbuhan populasi *prey* ditulis sebagai berikut.

$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy \qquad \mathbf{2.23}$$

dengan $a, \alpha > 0$ dan $\frac{dx}{dt}$ merupakan laju pertumbuhan prey, xy menyatakan adanya interaksi antara populasi *prey* dan *predator*, dan tanda negatif menyatakan bahwa laju pertumbuhan *prey* berkurang karena adanya interaksi *prey* dan *predator*. Persamaan (2.23) menyatakan bahwa populasi *prey* mengalami pertumbuhan, akan tetapi laju pertumbuhan populasinya dihambat oleh interaksi *prey* tersebut dengan *predator*.

Kemudian pertumbuhan populasi predator karena tidak adanya prey akan berkurang. Besarnya pengurangan tersebut adalah $-cy$, dengan c adalah laju kematian alami populasi *predator* dan y adalah populasi *predator*. Namun, pertumbuhan populasi terebut akan bertambah karena adanya prey, besarnya pertambahan tersebut adalah γxy, dengan γ adalah parameter interaksi antara *predator* dan *prey*. Dengan demikian, model dinamika pertumbuhan populasi predator dapat ditulis sebagai berikut.

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy \qquad \mathbf{2.24}$$

dengan $c, \gamma > 0$ dan $\frac{dx}{dt}$ merupakan laju pertumbuhan *predator*. Persamaan (2.24) menyatakan bahwa laju pertumbuhan *predator* bertambah karena adanya interaksi dengan *prey* dan berkurang karena tidak ada *prey*. Kemudian berdasarkan persamaan (2.23) dan (2.24) diperoleh sistem predator-prey yang secara matematis ditunjukkan pada sistem (2.25) berikut.

$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy \qquad \mathbf{2.25a}$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy \qquad \mathbf{2.25b}$$

dengan $a, c, \alpha, \gamma > 0$, a merupakan laju kelahiran dari *prey* dan c merupakan laju kematian alami dari *predator*, sedangkan α merupakan parameter interaksi antara *prey* dan *predator*, interaksi yang dimaksud yaitu *prey* akan dimangsa oleh *predator* dan γ merupakan parameter interaksi antara *predator* dan *prey*, interaksi yang dimaksud yaitu *predator* akan memangsa *prey*. Persamaan (2.25) disebut dengan persaman *Lotka-Volterra* (Boyce dan Diprima, 2009:534).

D. Deret Taylor dan Deret Maclaurin

Definisi 2.5 (Thomas dan Ross, 1996:672)

Misalkan $f(x)$ dapat diturunkan hingga n kali pada $x = a$, maka $f(x)$ dapat dinyatakan sebagau deret

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^n(a)(x-a)^n$$

Persamaan di atas disebut *Deret Taylor* dengan pusat $x = a$ atau disebut dengan polinomial Taylor pada $x = a$. Jika $x = 0$, maka persamaan di atas disebut *Deret Mac Laurin*.

E. Sistem Linear

Menurut Perko (2001:1) sistem linear dinyatakan sebagai

$$\dot{x} = Ax \qquad \mathbf{2.26}$$

dengan $x \in \mathbb{R}^n$, A matriks berukuran $n \times n$ dan

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}$$

Solusi dari sistem (2.26) dengan nilai awal $x(0) = x_0$ adalah

$$x(t) = e^{At}x_0 \qquad \mathbf{2.27}$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa solusi dari sistem (2.26) dengan nilai awal $x(0) = x_0$ adalah $x(t) = e^{At}x_0$

Bukti:

$x(t) = e^{At}x_0$

$\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(e^{At}x_0)}{dt}$

dimana e^{At}didefinisikan oleh deret Taylor sebagai berikut

$$e^{At} = 1 + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k$$

$$\Leftrightarrow e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^kt^k}{k!}x_0$$

sehingga

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}x_0$$

$$= \frac{d}{dt}\left(A^0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}\right)x_0$$

$$= 0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k k t^{k-1}}{k(k-1)!}x_0$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!}x_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \left(\frac{A^1 t^0}{0!} + \frac{A^2 t^1}{1!} + \frac{A^3 t^2}{2!} + \cdots\right)x_0$$

$$= \left(A + A^2 t + \frac{A^3 t^2}{2!} + \cdots\right)x_0$$

$$= A\left(I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \cdots\right)x_0$$

$$= A\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}\right)x_0$$

$$= Ae^{At}x_0$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}(t) = Ax(t)$$

$$\Leftrightarrow \dot{x} = Ax \qquad \blacksquare$$

Definisi 2.6 (Perko, 2001:33)

Matriks N dikatakan nilpotent order k jika $N^{k-1} \neq 0$ dan $N^k = 0$.

Contoh 2.5

Diberikan matriks

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriks N tersebut merupakan matriks nilpotent order 2. Untuk memeriksanya, harus ditunjukkan $N^1 \neq 0$ dan $N^2 = 0$ sebagai berikut

$$N^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \neq 0$$

$$N^2 = N \times N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Berdasarkan Definisi 2.5, $N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ adalah matriks nilpotent.

Berdasarkan nilai-nilai eigen dari matriks A, bentuk dari e^{At} dibagi menjadi tiga, sebagai berikut:

1. Jika matriks A berukuran $n \times n$ mempunyai sebanyak n nilai eigen real yang berbeda maka bentuk e^{At} menjadi (Perko, 2001:7)

$$e^{At} = P\ diag\left[e^{\lambda_n t}\right] P^{-1}$$

dengan $P = [v_1\ v_2\ ...\ v_n]$ adalah matriks yang mempunyai invers, dan λ adalah nilai eigen dari matriks A, dengan $1 \leq j \leq n$, $j \in \mathbb{N}$ dan

$$diag\left[e^{\lambda_n t}\right] = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

sehingga persamaan (2.27) menjadi

$$x(t) = P\ diag\left[e^{\lambda_n t}\right] P^{-1} x_0$$

2. Jika matriks A berukuran $2n \times 2n$ dengan blok 2×2sepanjang diagonal, mempunyai sebanyak $2n$ nilai eigen kompleks yang berbeda maka bentuk e^{At} menjadi (Perko, 2001:29)

$$e^{At} = P\ diag\left\{e^{a_j t} \begin{bmatrix} \cos b_j t & -\sin b_j t \\ \sin b_j t & \cos b_j t \end{bmatrix}\right\} P^{-1}$$

dengan $P = [v_1\ u_1\ v_2\ u_2\ ...\ v_n\ u_n]$ adalah matriks yang mempunyai invers, dan nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda_j = a_j \pm ib_j$, dengan $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$, $j \in \mathbb{N}$ sehingga persamaan (2.27) menjadi

$$x(t) = P\ diag\left\{e^{a_j t}\begin{bmatrix}\cos b_j t & -\sin b_j t \\ \sin b_j t & \cos b_j t\end{bmatrix}\right\}P^{-1}x_0$$

3. Jika matriks A berukuran $n \times n$ mempunyai sebanyak k nilai eigen kembar dengan $k < n$ maka bentuk e^{At} menjadi (Perko, 2001:33)

$$e^{At} = P\ diag\left[e^{\lambda_j t}\right]P^{-1}\left[I + Nt + \cdots + \frac{N^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!}\right]$$

dengan $P = [v_1\ v_2\ ...\ v_n]$ adalah matriks yang mempunyai invers, dan λ adalah nilai eigen dari matriks A, dan $N = A - S$ adalah matriks nilpotent order k dengan N dan S komutatif yaitu $SN = NS$, dan $S = P\ diag\left[\lambda_j\right]P^{-1}$ sehingga persamaan (2.27) menjadi

$$x(t) = P\ diag\left[e^{\lambda_j t}\right]P^{-1}\left[I + Nt + \cdots + \frac{N^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!}\right]x_0$$

4. Jika matriks A berukuran $n \times n$ mempunyai sebanyak n nilai eigen kembar maka bentuk e^{At} menjadi (Perko, 2001:33)

$$e^{At} = \ diag\left[e^{\lambda_j t}\right]\left[I + Nt + \cdots + \frac{N^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!}\right]$$

$N = A - S$ adalah matriks nilpotent order k dengan N dan S komutatif yaitu $SN = NS$, dan $S = \ diag\left[\lambda_j\right]$ sehingga persamaan (2.27) menjadi

$$x(t) = \ diag\left[e^{\lambda_j t}\right]\left[I + Nt + \cdots + \frac{N^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!}\right]x_0$$

Contoh 2.6

Diberikan sistem dinamik linear

$$\dot{x_1} = -3x_1 - x_2 \qquad \mathbf{2.28}$$

$$\dot{x_2} = x_1 - x_2$$

Akan dicari solusi sistem (2.28)

Penyelesaian:

Sistem (2.28) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{2.29}$$

Dari persamaan (2.29) dimisalkan

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (2.3) maka diperoleh

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

sehingga persamaan karakteristiknya adalah

$$(\lambda + 2)^2 = 0 \qquad \mathbf{2.30}$$

dan diperoleh nilai eigen dari matriks A yaitu $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Kemudian berdasarkan nilai eigen tersebut diperoleh

$$S = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

dan

$$N = A - S = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk memeriksa N adalah matriks nilpotent order 2, akan ditunjukkan $N^2 = 0$ yaitu

$$N^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

diperoleh

$$e^{At} = diag[e^{-2t}] \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} t \right)$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - t & -t \\ t & 1 + t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-2t} - te^{-2t} & -te^{-2t} \\ te^{-2t} & e^{-2t} + te^{-2t} \end{bmatrix}$$

Jadi, solusi dari sistem (2.28) adalah

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} - te^{-2t} & -te^{-2t} \\ te^{-2t} & e^{-2t} + te^{-2t} \end{bmatrix} [x_0]$$

F. Titik Ekuilibrium

Diberikan sistem autonomous sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n \qquad \mathbf{2.31}$$

Definisi 2.7 (Perko, 2001:102)

Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ merupakan titik ekuilibrium dari sistem (2.31) jika $f(\bar{x}) = 0$

G. Linearisasi Sistem Nonlinear

Linearisasi merupakan proses membawa sistem nonlinear ke sistem linear. Linearisasi dilakukan untuk melihat perilaku sistem di sekitar titik ekuilibrium.

Teorema 2.2 (Perko, 2001:67)

Jika $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mempunyai turunan di $\bar{x}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ maka turunan parsial $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \ldots, n$ ada pada $\bar{x}$ dan untuk setiap $x \in \mathbb{R}^n$ berlaku

$$Df(\bar{x})x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x})x_j$$

Bukti:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x})x_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x})x_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x})x_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x})x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x})x_2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x})x_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x})x_2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x})x_n \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x})x_n \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x})x_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x})x_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x})x_j = Df(\bar{x})x \qquad \blacksquare$$

Matriks $Df(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix}$ dinamakan matriks Jacobian.

Definisi 2.7 (Perko, 2001:102)

Diberikan matriks Jacobian $Df(\bar{x})$. Sistem linear $\dot{x} = \big(Df(\bar{x})\big)x$ disebut linearisasi dari sistem $\dot{x} = f(x)$ di sekitar titik $\bar{x}$.

H. Kestabilan Titik Ekuilibrium

Definisi 2.8 (Olsder dan Woude, 2004 : 57)

Diberikan sebuah sistem dinamik $\dot{x} = f(x)$ dengan $x \in \mathbb{R}^n$ dan mempunyai penyelesaian $x(t, x_0)$ dengan keadaan awal $x(0) = x_0$, maka

1. Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$ maka $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq 0$.
2. Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan stabil asimtotik jika titik tersebut stabil dan jika ada $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $lim_{t\to\infty}\|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$ bila $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta_1$.
3. Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan tidak stabil jika tidak memenuhi (1).

Teorema 2.3 (Olsder dan Woude, 2004:58)

Diberikan sistem linear $\dot{x} = Ax$ dengan matriks A berukuran $n \times n$ yang memupnyai k nilai eigen yang berbeda yaitu $\lambda_1,\ \lambda_1, \dots, \lambda_k\ (k \leq n)$

1. Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ dikatakan stabil asimtotik jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) < 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$
2. Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ dikatakan stabil jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$ dan jika ada nilai eigen λ_i imajiner dengan

$Re(\lambda_i) = 0$, maka multiplisitas aljabar dan geometri untuk nilai eigen harus sama.

3. Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen dengan $Re(\lambda_i) > 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$.

Bukti:

1. ($\Rightarrow$) Akan dibuktikan bahwa jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik maka $Re(\lambda_i) < 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$.

Berdasarkan Definisi 2.6, titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ dikatakan stabil asimtotik jika $\lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$. Dengan kata lain, untuk $t \to \infty$, $x(t, x_0)$ akan menuju $\bar{x} = 0$. Karena $x(t, x_0)$ merupakan solusi dari sistem linear $\dot{x} = Ax$, maka $x(t, x_0)$ selalu memuat $e^{Re(\lambda_i)t}$, akibatnya untuk $e^{Re(\lambda_i)t}$ akan menuju $\bar{x} = 0$ maka $Re(\lambda_i) < 0$.

($\Leftarrow$) Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa jika $Re(\lambda_i) < 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$ maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik.

Solusi dari sistem linear $\dot{x} = Ax$ adalah (t, x_0) , sehingga $x(t, x_0)$ selalu memuat $e^{Re(\lambda_i)t}$. Jika $Re(\lambda_i) < 0$, maka untuk $t \to \infty$, $x(t, x_0)$ akan menuju $\bar{x} = 0$, sehingga berdasarkan definisi 2.6, titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik.

2. ($\Rightarrow$) Akan dibuktikan bahwa jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil, maka $Re(\lambda_i) \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$

Andaikan $Re(\lambda_i) \leq 0$ maka solusi dari sistem linear $\dot{x} = Ax$ yaitu $x(t, x_0)$ yang memuat $e^{Re(\lambda_i)t}$ akan menuju ∞ (menjauhi titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$) untuk

$t \to \infty$, sehingga sistem tidak stabil. Hal ini sesuai dengan kontraposisi pernyataan jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil, maka $Re(\lambda_i) \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$. Jadi, terbukti bahwa jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil, maka $Re(\lambda_i) \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$.

($\Leftarrow$) Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa jika $Re(\lambda_i) \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$ maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil dan jika ada nilai eigen λ_i imajiner dengan $Re(\lambda_i) = 0$, maka multiplisitas aljabar dan geometri untuk nilai eigen harus sama.

Solusi dari sistem linear $\dot{x} = Ax$ adalah (t, x_0) , sehingga $x(t, x_0)$ selalu memuat $e^{Re(\lambda_i)t}$. Jika $Re(\lambda_i) < 0$ maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimstotik (pasti stabil). Jika $Re(\lambda_i) = 0$, maka nilai eigen berupa bilangan kompleks murni. Multiplisitas aljabar berhubungan dengan nilai eigen, sedangkan geometri berhubungan dengan vektor eigen. Oleh karena itu, akan dibuktikan bahwa banyak nilai eigen dan vektor eigen adalah sama.

Diambil sebarang sistem pada $\mathbb{R}^2$ yang mempunyai nilai eigen bilangan kompleks murni.

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad a > 0, \qquad b > 0 \qquad \mathbf{2.32}$$

Nilai eigen sistem (2.32) ditentukan dengan mensubstitusikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ ke dalam persamaan $|A - \lambda I| = 0$ maka diperoleh

$$\begin{vmatrix} -\lambda & a \\ -b & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Persamaan karakteristik dari matriks A adalah

$$\lambda^2 + ab = 0 \qquad \mathbf{2.33}$$

Akar dari persamaan (2.33) adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-4ab}}{2} = \frac{\pm 2i\sqrt{ab}}{2} = \pm i\sqrt{ab}$$

dan diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = i\sqrt{ab}$ dan $\lambda_2 = -i\sqrt{ab}$

Berdasarkan definisi 2.1, $x = (x_1, x_2)^T$ adalah vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan λ jika dan hanya jika x adalah pemecahan tak trivial dari $(A - \lambda I)x = 0$, yakni

$$\begin{bmatrix} -\lambda & a \\ -b & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{2.34}$$

Untuk $\lambda_1 = i\sqrt{ab}$, maka (2.34) menjadi

$$\begin{bmatrix} -i\sqrt{ab} & a \\ -b & -i\sqrt{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{2.35}$$

Sistem (2.35) ekuivalen dengan

$$-i\sqrt{ab}x_1 + ax_2 = 0 \qquad \mathbf{2.36a}$$

$$-bx_1 - i\sqrt{ab}x_2 = 0 \qquad \mathbf{2.36a}$$

Berdasarkan (2.36) diperoleh penyelesaian dari sistem (2.35) adalah $x_1 = -\frac{i\sqrt{ab}}{b}x_2$. Misalkan $x_2 = t$, vektor eigen yang bersesuaian $\lambda_1 = i\sqrt{ab}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{i\sqrt{ab}}{b} \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Untuk $\lambda_2 = -i\sqrt{ab}$, maka (2.34) menjadi

$$\begin{bmatrix} i\sqrt{ab} & a \\ -b & i\sqrt{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{2.37}$$

Sistem (2.35) ekuivalen dengan

$$i\sqrt{ab}x_1 + ax_2 = 0 \qquad \mathbf{2.38a}$$

$$-bx_1 + i\sqrt{ab}x_2 = 0 \qquad \mathbf{2.38a}$$

Berdasarkan (2.38) diperoleh penyelesaian dari sistem (2.37) adalah $x_1 = \frac{i\sqrt{ab}}{b}x_2$.

Misalkan $x_2 = t$, vektor eigen yang bersesuaian $\lambda_2 = -i\sqrt{ab}$ yaitu

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{ab}}{b} \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Terbukti bahwa banyaknya nilai eigen sama dengan banyaknya vektor eigen.

3. (⇒) Akan dibuktikan jika titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil, maka $Re(\lambda_i) > 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$

Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ dikatakan tidak stabil jika $t \to \infty$, maka $x(t, x_0)$ akan menuju ∞. Karena $x(t, x_0)$ merupakan solusi dari sistem linear $\dot{x} = Ax$, maka $x(t, x_0)$ memuat $e^{Re(\lambda_i)t}$. Untuk $x(t, x_0)$ menuju ∞ dipenuhi jika $Re(\lambda_i) > 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$.

(⇐) Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa jika $Re(\lambda_i) > 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$ maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil.

Jika $Re(\lambda_i) > 0$, maka solusi dari sistem linear $\dot{x} = Ax$ yaitu $x(t, x_0)$ yang memuat $e^{Re(\lambda_i)t}$ akan menuju ∞. Dengan kata lain, solusi tersebut akan menjauhi titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ sehingga titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ dikatakan tidak stabil. ■

I. Kriteria Routh-Hurwitz

Kestabilan suatu sistem dapat ditentukan dengan menggunakan nilai eigen. Nilai eigen matriks A dapat ditentukan dengan persamaan karakteristik $|\lambda I - A| = 0$. Namun, akar-akar persamaan karakteristiknya tidak selalu dapat ditentukan dengan mudah, terutama ketika persamaan karakteristik berorde tinggi. Oleh karena itu, perlu adanya suatu kriteria yang menjamin bahwa akar-akar persamaan karakteristiknya bernilai negatif atau ada nilai akar yang bernilai positif. Salah satu kriteria yang dapat digunakan untuk menguji kestabilan sistem adalah kriteria Routh-Hurwitz.

Diberikan persamaan karakteristik nilai eigen λ dari matriks $A_{n\times n}$ sebagai berikut

$$|\lambda I - A| = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

dengan $a_{i,}, i = 1, 2, \dots, n$ dan $a_0 \neq 0$ merupakan koefisien dari persamaan karakteristik matriks A .

Tabel Routh-Hurwitz merupakan tabel yang disusun berdasarkan pengurutan koefisien-koefisien dari matriks A. Berikut diberikan tabel Routh-Hurwitz yang ditunjukkan pada Tabel 2.1

Tabel 2.1 Tabel Routh-Hurwitz

a_0	a_2	a_4	$\cdots$
a_1	a_3	a_5	$\cdots$
b_1	b_2	b_3	$\cdots$
c_1	c_2	c_3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

dengan $b_i, c_i, i = 1, 2, \dots, n$ didefinisikan sebagai berikut

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}, \qquad b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}, \qquad b_n = \frac{a_1a_{2n} - a_0a_{2n+1}}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, \qquad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}, \qquad c_2 = \frac{b_1 a_{2n+} - a_1 b_{n+1}}{b_1}$$

Suatu sistem dikatakan stabil menurut teorema 2.3 apabila mempunyai nilai eigen dengan bagian real negatif yang ditunjukan dengan tidak adanya perubahan pada setiap elemen di kolom pertama tabel Routh-Hurwitz.

Definisi 2.9 (Olsder dan Woude, 2004:61)

Diberikan polinomial

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n \qquad \mathbf{2.39}$$

dengan $a_0 \neq 0$, akar-akar polinomial (2.39) memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika tabel Routh-Hurwitz terdiri dari $n+1$ baris dan setiap elemen di kolom pertama pada tabel tidak mengalami perubahan tanda, setiap elemen pada kolom pertama dapat bertanda positif atau negatif.

J. Bifurkasi

Pada suatu sistem dinamik yang memiliki nilai eigen nol, maka sistem tersebut rentan terhadap gangguan. Sedikit saja sistem mengalami gangguan maka nilai eigen dari sistem dapat berpindah ke daerah stabil atau ke daerah tidak stabil. Keadaan inilah yang sering disebut dengan bifurkasi yaitu perubahan kestabilan suatu sistem dinamik seiring dengan perubahan parameter.

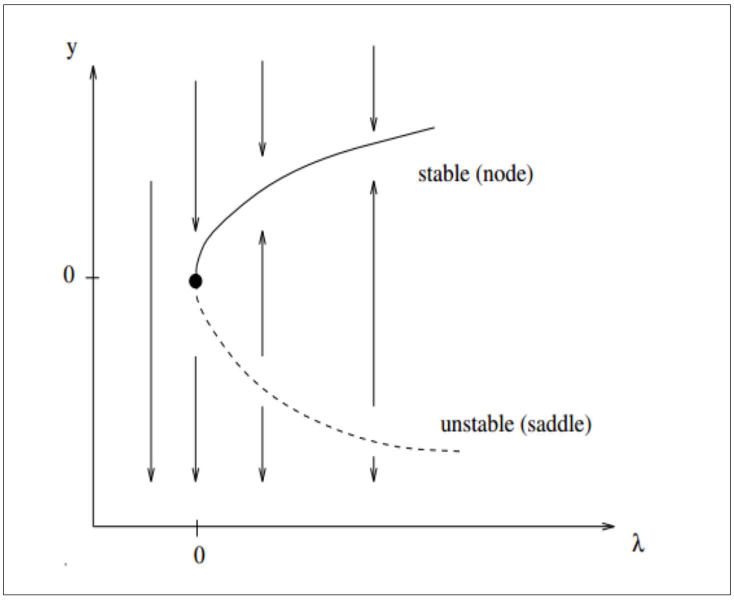
Definisi 2.10 (Kuznetsov, 1998:57)

Bifurkasi adalah munculnya potret fase yang tidak ekuivalen secara topologi karena adanya perubahan parameter.

Bifurkasi yang paling sederhana untuk dipelajari adalah bifurkasi dengan parameter berdimensi-1. Beberapa jenis bifurkasi tersebut adalah sebagai berikut :

1. Bifurkasi Saddle-Nodes

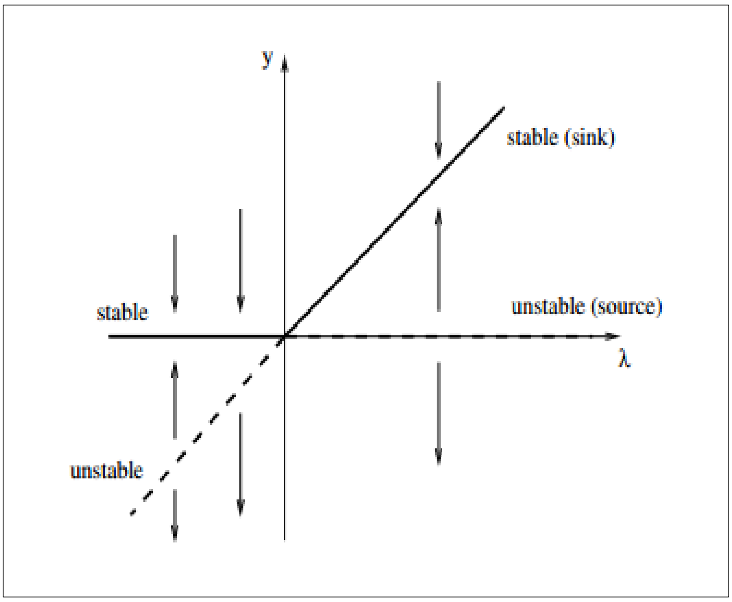
Bifurkasi saddle-nodes digambarkan dengan $\dot{y} = \lambda - y^2$. Jika $\lambda = 0$ tidak ada solusi ekuilibrium, sedangkan pada saat $\lambda > 0$ terdapat dua solusi ekuilibrium yaitu solusi stabil $y = \sqrt{\lambda}$ dan solusi tak stabil $y = -\sqrt{\lambda}$. Bifurkasi ini dapat ditunjukkan oleh gambar berikut (Seydel, 2009:62) :



Gambar 2.1 Bifurkasi Saddle Nodes

2. Bifurkasi Transkritikal

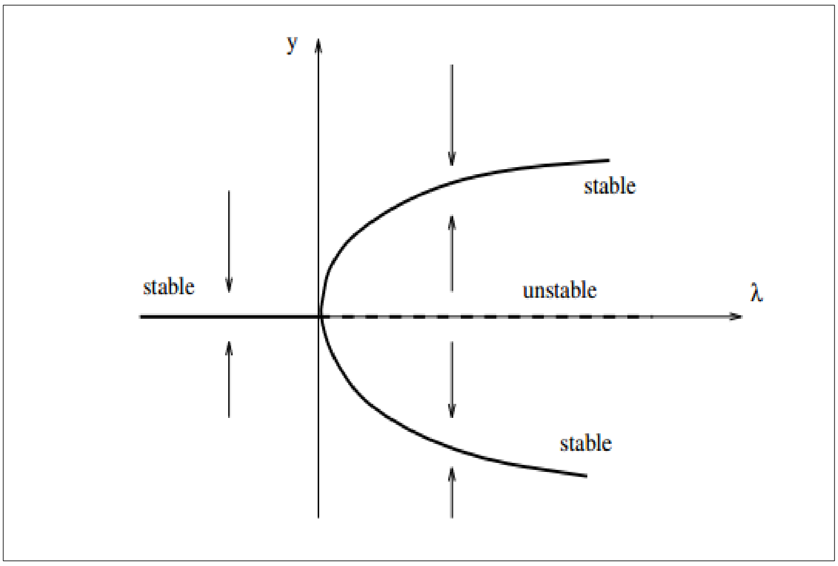
Bifurkasi transkritikal digambarkan dengan $\dot{y} = \lambda y - y^2$. Terdapat dua solusi ekuilibrium yaitu $y = 0$ dan $y = \lambda$, keduanya mengalami perubahan kestabilan pada saat λ melewati 0. Bifurkasi ini dapat ditunjukkan oleh gambar berikut (Seydel, 2009 : 64-65) :



Gambar 2.2 Bifurkasi Transkritikal

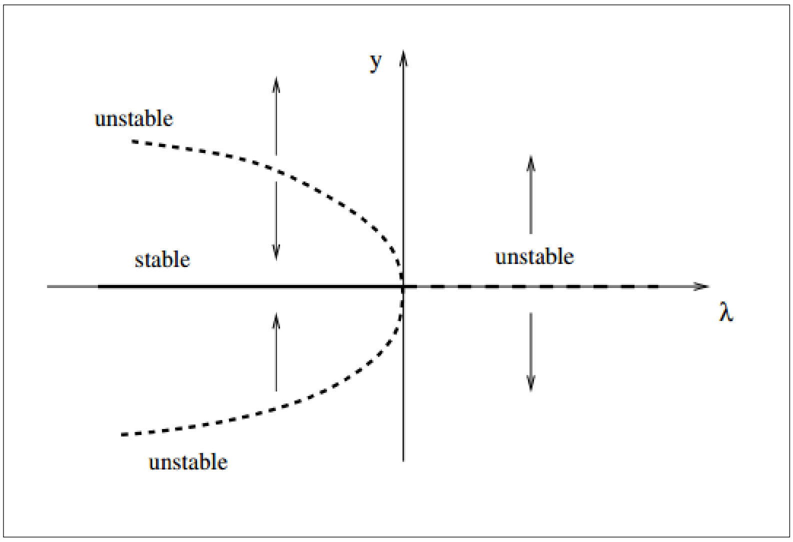
3. Bifurkasi Pitchfork

Bifurkasi pitchfork dibagi menjadi dua yaitu bifurkasi pitchfork superkritikal dan bifurkasi pitchfork subkritikal. Bifurkasi pitchfork superkritikal digambarkan dengan persamaan diferensial $\dot{y} = \lambda y - y^3$. Jika $\lambda < 0$ tidak ada solusi ekuilibrium, sedangkan jika $\lambda > 0$ ada tiga solusi ekuilibrium yaitu solusi tak stabil $y = 0$ dan dua buah solusi stabil $y = \pm\sqrt{\lambda}$. Bifurkasi ini ditunjukkan oleh gambar sebagai berikut (Seydel, 2009 : 64-65) :



Gambar 2.3 Bifurkasi Pitchfork Superkritikal

Sedangkan bifurkasi pitchfork subkritikal digambarkan dengan persamaan diferensial $\dot{y} = \lambda y + y^3$. Jika $\lambda > 0$ tidak ada solusi ekuilibrium, sedangkan jika $\lambda < 0$ ada tiga solusi ekuilibrium yaitu solusi stabil $y = 0$ dan dua buah solusi tak stabil $y = \pm\sqrt{-\lambda}$. Bifurkasi ini ditunjukkan oleh gambar sebagai berikut (Seydel, 2009 : 65) :



Gambar 2.4 Bifurkasi Pitchfork Subkritikal

4. Bifurkasi Hopf

Definisi 2.11 Bifurkasi yang bersesuaian dengan $\lambda_{1,2} = \pm\omega i$, $\omega_0 > 0$, dengan ω_0 adalah bagian imaginer dari nilai eigen yang terkait. Maka bifurkasi yang akan terjadi disebut bifurkasi Hopf atau Andronov-Hopf (Kuznetsov, 1998:80).

K. Teori *Center Manifold*

Kestabilan sistem yang nilai eigennya mempunyai bagian real yang bernilai nol tidak dapat dilakukan dengan melihat kestabilan linearisasi dari sistem tersebut. Oleh karena itu, untuk menentukan kestabilan sistem yang nilai eigennya mempunyai bagian real yang bernilai nol digunakan teori *center manifold.*

Sebuah sistem persamaan diferensial didefinisikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x,y), \\ \dot{y} &= By + g(x,y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^c \end{aligned} \qquad \mathbf{2.40}$$

dimana :

$$f(0,0) = 0, \quad Df(0,0) = 0$$

$$g(0,0) = 0, \quad Dg(0,0) = 0$$

dengan A merupakan matriks $c \times c$ dengan nilai eigen tidak hiperbolik, B matriks $s \times s$ dengan nilai eigen hiperbolik negatif, dimana f dan g adalah fungsi $C^r (r \geq 2)$, dimana C^r merupakan suatu fungsi yang selalu kontinu hingga turunan ke r.

Definisi 2.12 (Wiggins, 2003 : 246)

Center manifold untuk sistem (2.40) didefinisikan sebagai

$$W^c(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^c \mid y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\} \qquad \mathbf{2.41}$$

untuk δ yang cukup kecil.

Dari persamaan (2.41) diperoleh

$$y = h(x) \qquad \mathbf{2.42}$$

kemudian persamaan (2.42) diturunkan terhadap t sehingga diperoleh

$$\dot{y} = Dh(x)\dot{x} \qquad \mathbf{2.43}$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (2.43) ke persamaan (2.40) sehingga diperoleh

$$\dot{x} = Ax + f(x, h(x)) \qquad \mathbf{2.44}$$

$$\dot{y} = Bh(x) + g\big(x, h(x)\big) \qquad \mathbf{2.45}$$

Substitusikan persamaan (2.43) ke (2.45) sehingga diperoleh

$$Dh(x)\dot{x} = Bh(x) + g\big(x, h(x)\big) \qquad \mathbf{2.46}$$

Kemudian substitusikan persamaan (2.44) ke persamaan (2.46)

$$Dh(x)[Ax + f\big(x, h(x)\big)] = Bh(x) + g\big(x, h(x)\big) \qquad \mathbf{2.47}$$

atau

$$\mathcal{N}\big(h(x)\big) = Dh(x)\big[Ax + f\big(x, h(x)\big)\big] - Bh(x) - g\big(x, h(x)\big) = 0 \qquad \mathbf{2.48}$$

Persamaan (2.48) merupakan persamaan *manifold center*.

L. Vektor Eigen Tergeneralisasi

Vektor eigen tergeneralisasi muncul jika ada nilai eigen yang sama besar. Diberikan sebuah matriks persegi A berukuran $n \times n$.

Definisi 2.13 (Perko, 2001 : 32)

Misalkan λ merupakan nilai eigen dari matriks A yang berukuran $n \times n$ dengan multiplisitas $1 < m \leq n$. Kemudian untuk $k = 1, \dots, m$, solusi taknol v dari

$$(A - \lambda I)^k v = 0$$

disebut sebagai vektor eigen tergeneralisasi dari A.

Contoh 2.7

Diberikan matriks A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks A mempunyai nilai eigen $\lambda_1 = 1$, dan $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ dan vektor eigen yang bersesuaian adalah $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ dan $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Kemudian harus dicari vektor eigen tergeneralisasi yang bersesuaian dengan $\lambda = 2$ yaitu dengan mencari penyelesaian taknol dari

$$(A - \lambda I)^2 v = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^2 v = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} v = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} v = 0$$

dan diperoleh $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$